Übungen zu Mathematik I

Blatt 1

Aufgabe 1: Wenden Sie die Potenzgesetze an um die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich zu vereinfachen:

a) $3^2 \cdot 3^1$

b) $4^2 \cdot 4^9 \cdot 4^{-12}$

c) $4^8 \cdot 2^{-3} \cdot 2^5 \cdot 5^9$

Lösung:

a) $3^2 \cdot 3^1 = 3^3$

b) $4^2 \cdot 4^9 \cdot 4^{-12} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$

c) $4^8 \cdot 2^{-3} \cdot 2^5 \cdot 5^9 = 4^8 \cdot 2^2 \cdot 5^9 = 4^8 \cdot 4 \cdot 5^9 = 4^9 \cdot 5^9 = (4 \cdot 5)^9 = 20^9$

Aufgabe 2: Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

a) $a^2 b^{-2} a^{-3} b^3$

b) $\dfrac{y^{-2} x^3 z^4}{z^{-2} y^3 x^2}$

c) $\dfrac{n^{-2/3} m^2}{m^{1/2} n^{1/3}}$.

Lösung:

a) $a^2 b^{-2} a^{-3} b^3 = a^{-1} \cdot b^1 = \frac{b}{a}$

b) $\dfrac{y^{-2} x^3 z^4}{z^{-2} y^3 x^2} = \dfrac{x z^6}{y^5}$

c) $\dfrac{n^{-2/3} m^2}{m^{1/2} n^{1/3}} = \dfrac{\sqrt{m}}{n}$.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Größe des Widerstands R_2:

$$R_{ges} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\,.$$

Lösung: Auflösen ergibt: $R_2 = \frac{R_1 \cdot R_{ges}}{R_1 - R_{ges}}$.

Aufgabe 4: Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$

b) $x^2 + 4x - 3 = 0$

c) $2x^2 - 4x - 6 = 0$

Lösungen:

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$, Lösung $x_1 = -3$, $x_2 = 1$

b) $x^2 + 4x - 3 = 0$, Lösung $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{7}$

c) $2x^2 - 4x - 6 = 0$, Lösung $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

Aufgabe 5: Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen in $\mathbb{C}$:

$$3x^2 - 12x + 3 = 0\,, \quad x^2 - 4x + 5 = 0 \quad x^2 - 2x + 3 = 0\,.$$

Lösung: Die Lösung für die erste Gleichung lautet:

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Die Lösung der zweiten Gleichung lautet:

$$x_{1,2} = 2 \pm i$$

Die Lösung der zweiten Gleichung lautet:

$$x_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{2}$$

Aufgabe 6: Nach Abb. 1 soll ein Doppeltor gebaut werden. Die Maße sind hier jeweils in mm angegeben. Der Querschnitt der Stäbe ist ein Quadrat mit Kantenlänge 50mm. Berechne die Gesamtlänge an Stäben, die mindestens benötigt wird. Beachte, wie die Profile zusammengebaut werden.

Lösung: Die benötigte Gesamtlänge der Stäbe ergibt sich aus der Stablänge der beiden

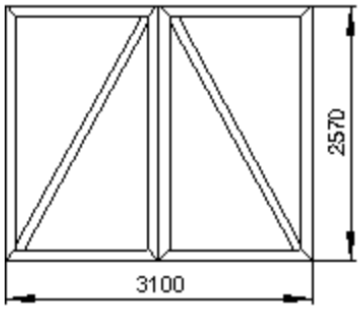


Abbildung 1: Skizze zu Aufgabe 6

Diagonalen, der Stablänge des Umfangs des Doppeltors und der Länge der beiden mittleren Stäbe.

Gesamtlänge der mittleren Stäbe: Beide Stäbe sind laut Skizze 2570mm lang. Somit ist die Gesamtlänge doppelt so lang: $L_1 = 5140$ mm.

Umfang des Doppeltors: Beim Doppeltor handelt es sich um ein Rechteck mit folgendem Umfang: $L_2 = 2 \cdot 3100 + 2 \cdot 2570 = 11340$ mm.

Stablänge der Diagonalen: Beide Stäbe sind die Diagonalen der inneren, rechteckigen Flächen. Um die Stäblänge auszurechnen benötigen wir die Länge und Breite der Innenflächen. Mit Hilfe der Skizze ergibt sich: $l = 1450$ mm und $b = 2470$ mm. Um die Stablänge einer Diagonalen zu berechnen, wenden wir den Satz des Pythagoras an:

$$d = l^2 + b^2 \approx 2864\, mm\,.$$

Die Länge beider Stäbe entspricht also: $L3 = 2 \cdot d = 5728$ mm.

Gesamte Stablänge: Die benötigte Gesamtlänge ist somit $L = L_1 + L_2 + L_3 = 22208$ mm. Es wird also eine Gesamtlänge von etwa 22208 mm = 22,208 m an Stäben benötigt.

Aufgabe 7: In der Physik werden oft Geschwindigkeitspfeile zerlegt in Horizontalgeschwidigkeit v_x und Vertikalgeschwindigkeit v_y . Dabei können v_x und v_y je nach Richtung (rechts/links bzw. oben/unten) positiv oder negativ sein. Beim Vektor $\vec{v}$ betrachten wir hier die Pfeillänge $|\vec{v}|$ (vgl. Abb. 2). Ergänze die Tabelle in Abb. 2.

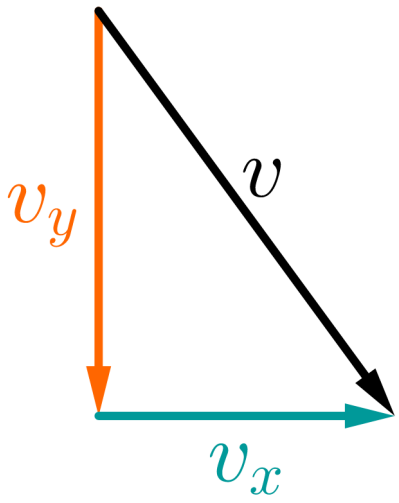
Lösung: Vergleiche Abb. 3.

Aufgabe 8: Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen und zeichnen Sie die Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene:

$$z_1 = 2 - 2i\,, \quad z_2 = -i \quad \text{und} \quad z_3 = 1 + 2i\,.$$

Lösung: Es gilt:

$$\mathrm{Re}(z_1) = 2\,,\, \mathrm{Im}(z_1) = -2$$



v_x	5	6			3	7
v_y	12	-8	0,8	15		
$\|v\|$			1	17	5	25

Abbildung 2: Skizze und Tabelle zu Aufgabe 7

v_x	5	6	0,6	8	3	7
v_y	12	-8	0,8	15	4	24
$\|v\|$	13	10	1	17	5	25

Abbildung 3: Lösung zu Aufgabe 7

$$\mathrm{Re}(z_2) = 0\,,\ \mathrm{Im}(z_1) = -1$$
$$\mathrm{Re}(z_3) = 1\,,\ \mathrm{Im}(z_1) = 2\,.$$

Aufgabe 9: Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene. Die Winkelangaben sind im Bogenmaß!

a) $z_1 = e^{i\pi}$

b) $z_2 = 2e^{i\pi/2}$

c) $z_3 = e^{i\pi/4}$

Lösung:

a) $z_1 = e^{i\pi}$, $\pi = 180°$, damit gilt $z_1 = -1$

b) $z_2 = 2e^{i\pi/2}$, $\pi/2 = 90°$, damit hilt $z_2 = 2i$

c) $z_3 = e^{i\pi/4}$, $\pi/4 = 45°$ damit die Winkelhalbierende des ersten Quadranten, Pfeillänge ist eins.